



Mise en correspondance de surfaces par chemins géodésiques

Etienne Huot, Hussein Yahia, Isabelle Herlin, Isaac Cohen

► To cite this version:

Etienne Huot, Hussein Yahia, Isabelle Herlin, Isaac Cohen. Mise en correspondance de surfaces par chemins géodésiques. [Rapport de recherche] RR-3842, INRIA. 1999. inria-00072815

HAL Id: inria-00072815

<https://hal.inria.fr/inria-00072815>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Mise en correspondance de surfaces par
chemins géodésiques***

Etienne Huot, Hussein Yahia, Isabelle Herlin, Isaac Cohen

N° 3842

Décembre 1999

_____ THÈME 3 _____



***rapport
de recherche***

Mise en correspondance de surfaces par chemins géodésiques

Etienne Huot, Hussein Yahia, Isabelle Herlin, Isaac Cohen

Thème 3 — Interaction homme-machine,
images, données, connaissances
Projet Air

Rapport de recherche n° 3842 — Décembre 1999 — 31pages

Résumé : Dans cette étude les auteurs s'intéressent au problème de la mise en correspondance de surfaces. Nous proposons une solution originale pour prendre en compte les grandes déformations et les changements de topologie. La méthode décrite repose sur le calcul d'une carte de distances géodésiques sur un graphe de coût. La fonction de coût représente le critère de mise en correspondance entre les deux surfaces reposant sur le graphe. Ce graphe est une variété de dimension 3 (ou une hypersurface) plongée dans un espace à 4 dimensions. La théorie présentée dans ce document est une généralisation de la méthode d'évolution de courbes géodésiques introduite en 1995 par Kimmel et *al.* Une formulation utilisant la théorie des isocontours est utilisée pour décrire l'évolution des surfaces comme des isosurfaces. Cette formulation, dite eulérienne, procure un schéma numérique stable pour résoudre les équations aux dérivées partielles. La méthode est appliquée à des exemples montrant à la fois des petites et des grandes déformations ainsi que des changements de topologie.

Mots-clé : Mise en correspondance, géodésique, fonction implicite, isocontour, algèbre extérieur, opérateur de Hodge.

(Abstract: *pto*)

Surfaces Matching with Geodesic Paths

Abstract: The general problem of surface matching is taken up in this document. We propose a solution which handles the case of surfaces displaying large deformation and arbitrary topological changes. The process described in this work hinges on a geodesic distance equation for a family of surfaces embedded in the graph of a cost function. The cost function represents the geometrical matching criterion between the two 3D surfaces. This graph is a 3-manifold (or hypersurface) in 4-dimensional space, and the theory presented herein is a generalization of the geodesic curve evolution method introduced in 1995 by R. Kimmel and al. An Eulerian level-set formulation of the geodesic surface evolution is also introduced, leading to a numerical scheme used for solving partial differential equations, which has proven to be very robust and stable. The method is applied on examples showing both small and large deformations, and arbitrary topological changes.

Key-words: Matching, géodésic, implicit function, level-set, exterior algebra, Hodge operator.

1 Propagation de fronts et isocontours

Depuis quelques années, diverses méthodologies du traitement d’images s’appuient sur la théorie de propagation des fronts [14, 18]. Ces méthodes présentent un intérêt particulier quand elles sont abordées par une formulation de type isocontour (*level-set*): en effet on peut en déduire des schémas de résolution des équations de propagation qui sont stables et efficaces [17]. Cette section rappelle ces deux théories.

1.1 Propagation des fronts

On appelle cette théorie “propagation de front” car elle permet de modéliser des comportements comme la propagation d’un feu de prairie (également appelé front de chaleur) sur une colline. Elle a été développée originellement pour modéliser l’expansion de cristaux [14].

Soit un contour S paramétré par s et se déplaçant en fonction de t , et défini par $S(s, t)$. On s’intéresse à son déplacement dans la direction de sa normale, c’est-à-dire que le vecteur déplacement $\partial S / \partial t$ est supposé orthogonal à la courbe (voir figure 1). Plus précisément, si \vec{n} est le vecteur unitaire normal au contour $S(s, t)$, on a :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, s) = F(S(s))\vec{n}(S(t)), \quad (1)$$

où F est la “vitesse” de l’évolution. En général F peut dépendre de plusieurs paramètres associés à la géométrie de la courbe. On constate que ce type d’évolution peut engendrer des “repliements” comme l’illustre la figure 2(a). Ces repliements peuvent être évités en utilisant une vitesse fonction de la courbure :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, s) = F(\kappa_S(s))\vec{n}(S(t))$$

comme l’illustre la figure 2(b).

1.2 Formulation par isocontours

Étant donnée une hypersurface Γ de dimension $N - 1$ plongée dans un espace à N dimensions, il existe une formulation dite “eulérienne”, proposée par Osher et Sethian [14], pour décrire le déplacement de $\Gamma(t)$ dans la direction de sa normale, à la vitesse F . On pose :

$$\Gamma(t = 0) = \{p | \varphi(p, t = 0) = 0\}$$

où p représente un point de \mathbb{R}^N et φ est définie de telle sorte que :

$$\varphi(x, t = 0) = \pm d,$$

d étant la distance calculée entre p et Γ .

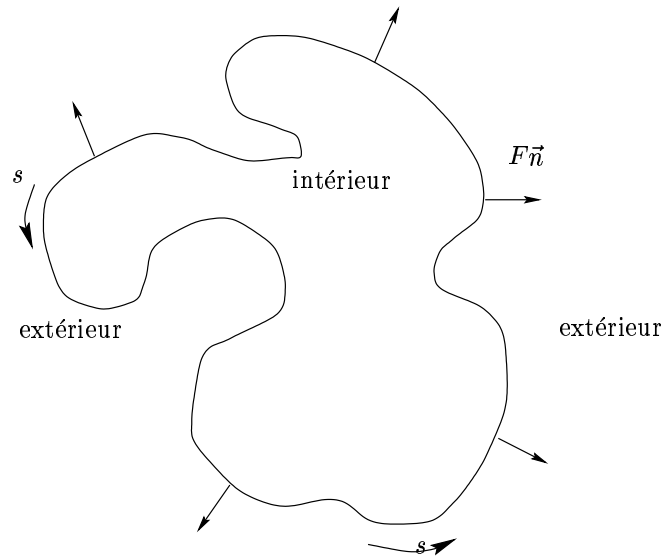


FIG. 1 – Propagation d'une courbe dans la direction de sa normale

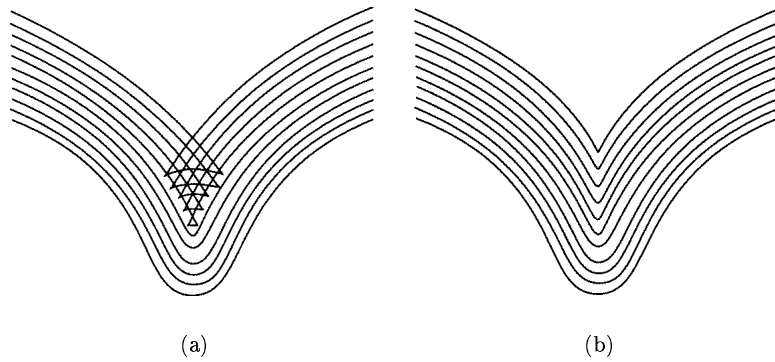


FIG. 2 – Différentes évolutions possibles d'un contour dans la direction de sa normale.

Dans ce contexte, on peut montrer [17] que l'équation (1) devient l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F|\nabla \varphi| = 0. \quad (2)$$

Pour certaines formes de la fonctionnelle F on obtient une équation du type Hamilton-Jacobi. Cette formulation est appelée "eulérienne" car le système de coordonnées reste fixé. La figure 3 illustre cette formulation dans le cas de la propagation d'un cercle.

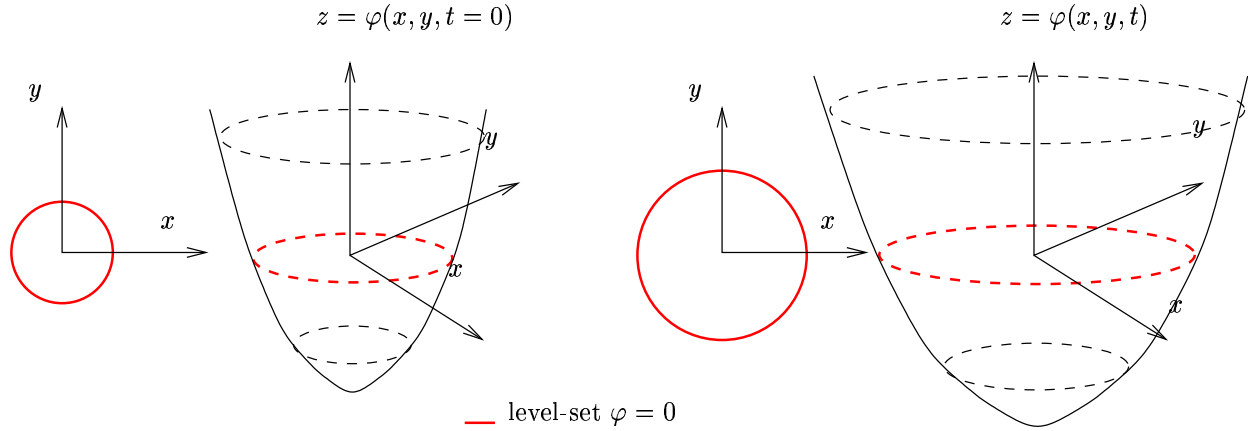


FIG. 3 – Propagation d'un cercle.

1.3 Applications

Les avantages de cette approche sont nombreux. On remarque en premier lieu que le contour équipotentiel $\varphi = 0$ et par conséquent l'hypersurface $\Gamma(t)$ peuvent changer de topologie, se rompre ou fusionner et même posséder des points singuliers. D'autre part cela permet également de faire les calculs numériques sur des grilles et par conséquent de faire des estimations des dérivées par différences finies. De plus les propriétés géométriques du front sont aisément calculables par le biais de la fonction φ , comme la courbure par exemple.

De nombreuses applications du traitement d'image peuvent tirer parti de ces avantages. On peut citer des méthodes de reconstruction 3D via l'information colorimétrique (*shape from shading*) [11, 13], de morphologie mathématique [16], de contours actifs [5, 2, 15], de squelettisation [12], etc.

Elle permet également le calcul de plus court chemin inscrit sur une surface [10]. Cette application peut justement être utilisée pour réaliser une mise en correspondance entre deux courbes. Les chemins de mise en correspondance s'inscrivent alors sur une surface de coût [4]. Cette méthode est décrite en détail au chapitre suivant, elle y est également étendue à la mise en correspondance de surfaces.

2 Distance géodésique sur une surface

Trouver des chemins de longueurs minimales entre deux régions est un problème bien connu qui présente un intérêt particulier dans bien des domaines (robotique, géophysique, navigation, *etc*). En 1995, Kimmel et *al.* [10] introduisirent une approche originale pour trouver des chemins de longueur minimale joignant deux courbes tracées sur une surface. Ce paragraphe rappelle les notions fondamentales de géométrie qui sont nécessaires à la compréhension de cette théorie, et se termine par une application à la mise en correspondance de courbes.

2.1 Géodésiques

On définit une **géodésique** sur une variété quelconque comme étant une courbe dont la dérivée seconde est toujours orthogonale à l'espace tangent à cette variété [20]. Dans le cas d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$, une courbe paramétrée définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \beta : \quad I &\rightarrow S \\ t &\mapsto \beta(t) \end{aligned}$$

est une géodésique de S si et seulement si $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ est orthogonale à S pour tout $t \in I$. C'est-à-dire si et seulement si $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ est colinéaire à $\vec{N}(\beta(t))$ pour tout $t \in I$, où \vec{N} représente la normale S au point $\beta(t)$:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} \propto \vec{N}(\beta(t)) \quad (3)$$

Par exemple, dans le cas où S est une sphère, les géodésiques sont les “méridiens” qui s'inscrivent sur S . C'est à dire tous les cercles qui ont pour centre le centre de la sphère, comme les cercles en rouge sur la figure 4(a). Les cercles dessinés en vert, ou “parallèles”, ne sont pas des géodésiques excepté l'équateur.

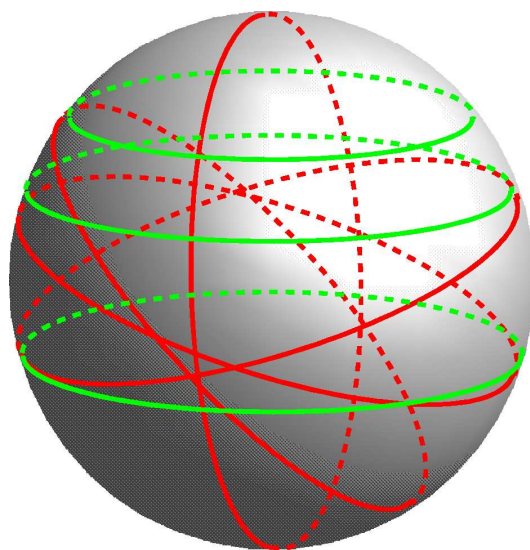
On peut montrer que les géodésiques sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2}(t) + \left\langle \frac{d\beta}{dt}(t), \frac{d\vec{N}(\beta(t))}{dt} \right\rangle \vec{N}(\beta(t)) = \vec{0}. \quad (4)$$

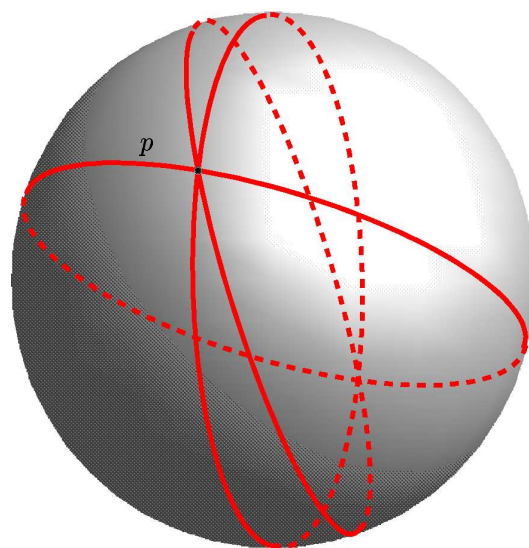
Une conséquence importante de l'équation (4) est qu'en tout point p d'une surface et quelle que soit la direction \vec{v} choisie il existe une unique géodésique portée par cette direction. C'est-à-dire qu'il existe un unique intervalle I contenant 0 et une unique courbe $\beta : I \rightarrow S$ telle que :

$$\begin{cases} \beta(0) = p \\ \frac{d\beta}{dt}(0) = \vec{v} \\ \beta(t) \text{ est une géodésique,} \end{cases}$$

et si $\tilde{\beta}$ est une autre courbe $\tilde{\beta} : \tilde{I} \rightarrow S$ vérifiant les même propriétés alors $\tilde{I} \subset I$ et $\tilde{\beta} = \beta|_{\tilde{I}}$.



(a) Cercles géodésiques (en rouge) et non-géodésiques (en vert).



(b) En un point quelconque p passe une infinité de géodésiques.

FIG. 4 – Géodésiques sur une sphère.

L'équation (4) permet de calculer effectivement des géodésiques dans des cas simples. Par exemple dans le cas où S est une sphère comme l'illustre la figure 4(b). On constate qu'en un point donné p il existe un continuum de géodésiques passant par ce point, chacune d'elles étant déterminée par une direction différente.

2.2 Chemins géodésiques

Puisque S est plongée dans un espace euclidien, elle hérite de la métrique euclidienne de cet espace ambiant. Ce qui signifie qu'étant donnés p et $q \in S$, on peut calculer $d(p, q)$ défini comme la longueur du segment de droite joignant p à q . Il est cependant possible de s'intéresser également aux longueurs des chemins tracés sur S . Il faut pour cela admettre que ces chemins existent, c'est à dire qu'il faut supposer que S connexe par arcs. Cette hypothèse étant faite on peut introduire une autre métrique qui porte le nom de **distance géodésique**. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de \mathbb{R} et $\beta : I \rightarrow S$ une courbe paramétrée C^1 joignant p à q . Soit $L(\beta)$ la longueur de β qui est par définition :

$$L(\beta) = \int_a^b \left\| \frac{d\beta}{dt}(t) \right\| dt.$$

On appelle la distance géodésique la quantité :

$$d_S(p, q) = \inf_{\beta} (L(\beta)).$$

Une conséquence du théorème de Hopf-Rimow-De Rham [19] est que si S est compacte alors il existe toujours une courbe de longueur minimale joignant p à q , et $d_S(p, q)$ est alors la longueur de cette courbe. On démontre que si β est une courbe C^1 par morceaux joignant p à q telle que $d_S = L(\beta)$, alors β est une courbe géodésique. Ce qui permet d'en déduire qu'un plus court chemin, s'il existe, est toujours une géodésique. On généralise ainsi au cas des surfaces la notion de plus court chemins, qui correspond dans l'espace euclidien ordinaire au segments de droite joignant deux points.

Malheureusement, pour trouver le plus court chemin entre deux points sur une surface, l'équation (4) n'est pas utilisable. En effet on ne connaît jamais à priori quelle direction prendre en un point. Dans une perspective de mise en correspondance on ne peut donc s'appuyer sur cette équation. La théorie développée par Kimmel et *al.* permet de s'affranchir de cette indétermination en calculant des géodésiques sans se préoccuper d'une direction. Cette théorie est rappelée dans le paragraphe suivant.

2.3 Équation d'évolution de courbes d'égale distance sur une surface

On cherche les chemins, portés par une surface, entre deux courbes de la surface, tels que ces chemins soient de distance minimale. La théorie développée par Kimmel et *al.* pour résoudre ce problème repose sur deux lemmes qui permettent de démontrer que l'évolution d'une courbe le long d'une surface est régie par une équation aux dérivées partielles.

Sur une surface $S \subset \mathbb{R}^3$, on considère un ensemble Σ de points tracés sur S . Dans la pratique Σ sera une courbe. On considère l'ensemble des points de S situés à distance géodésique minimale t de Σ (voir figure 5) :

$$\alpha(*, t) = \{p | d_S(p, \Sigma) = t\}$$

où $d_S(p, \Sigma)$ est la distance géodésique minimale entre p et Σ , déterminée par le plus court chemin, porté par S , partant de p et arrivant à Σ . On prend u comme abscisse curviligne

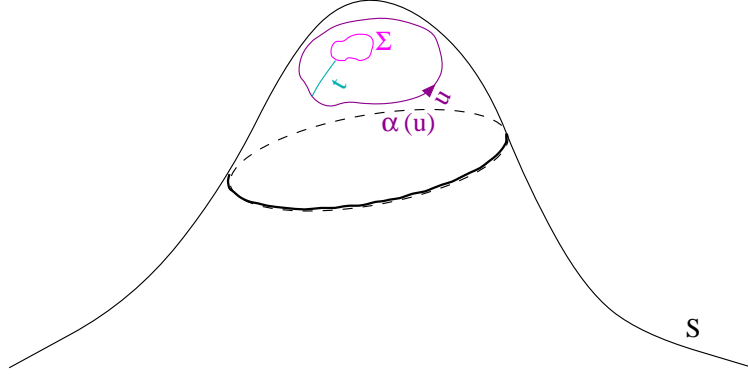


FIG. 5 – Ensemble des points de S à distance géodésique t de Σ .

de α .

Lemme 1

Pour tout u_0 fixé, la courbe $\beta(t) = \alpha(u_0, t)$ est une géodésique.

Lemme 2

L'évolution par rapport au paramètre t de la courbe d'égale distance est régie par :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \vec{N} \otimes \vec{\tau}^u \quad (5)$$

où $\vec{\tau}^u$ est la tangente à α c'est à dire $\vec{\tau}^u = \frac{\partial \alpha}{\partial u} / \|\frac{\partial \alpha}{\partial u}\|$ et \vec{N} est la normale à la surface S .

La démonstration de ces deux lemmes est décrite en détail dans [10]. Les démonstrations pour le cas 3D suivent les mêmes démarches et sont présentées au paragraphe ??.

Le lemme 2 donne l'équation d'évolution d'une courbe d'égale distance le long d'une surface S . On se place dans le cas où S est définie comme un graphe, c'est à dire :

$$\forall (x, y, z) \in S, z = z(x, y).$$

Si on définit le bord de la surface : $\{(x, y, z(x, y)) | (x, y, z(x, y)) \in \partial S\} = \alpha(u, 0)$, il est possible de déterminer les courbes à distance d : $\alpha(u, t)|_{t=d}$ calculées depuis $\alpha(0)$ en utilisant l'équation (5). On peut ainsi calculer la carte des distances pour chaque point de la surface.

Néanmoins, la résolution de l'EDP (5) reste complexe et par conséquent l'implémentation de l'évolution tridimensionnelle d'une courbe reste algorithmiquement lourde. Kimmel et *al.* ont donc proposé de ne s'intéresser qu'à la projection de l'évolution de cette courbe sur le plan (x, y) :

$$\mathcal{C}(t) = \Pi \circ \alpha = \{(x, y) | (x, y, z(x, y)) \in \alpha(t)\}.$$

Les auteurs utilisent alors une propriété provenant de la théorie de propagation des fronts (voir chapitre précédent) : l'évolution d'une courbe plane n'est déterminée que par sa composante le long de sa normale [9]. On cherche donc à exprimer $F = \langle \vec{n}, \Pi \circ (\vec{N} \otimes \tau^{\vec{u}}) \rangle$, où $\vec{n} = (n_1, n_2)$ est la normale à la courbe \mathcal{C} .

La surface S étant définie comme un graphe $Z(x, y, z)$, on a :

$$Z(x, y, z) = \{(x, y, z) | z = z(x, y)\},$$

et on peut donc calculer les dérivées : $Z_x = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x})$ et $Z_y = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y})$.

Si on pose $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, \vec{N} la normale au graphe Z peut donc s'écrire :

$$\vec{N} = \frac{Z_x \otimes Z_y}{\|Z_x \otimes Z_y\|} = \frac{(-p, -q, 1)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

De même, la tangente $\tau^{\vec{u}}$ à la courbe $\alpha(u)$ est définie par :

$$\tau^{\vec{u}} = \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} = \frac{(x_u, y_u, z_u)}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}}$$

On a :

$$\vec{N} \otimes \tau^{\vec{u}} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}} \begin{pmatrix} -qz_u - y_u \\ x_u + pz_u \\ -py_u + qx_u \end{pmatrix}$$

donc en projetant sur le plan (x, y) on obtient :

$$\Pi \circ (\vec{N} \otimes \tau^{\vec{u}}) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}} \begin{pmatrix} -qz_u - y_u \\ x_u + pz_u \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned} F &= \langle \vec{n}, \Pi \circ (\vec{N} \otimes \tau^{\vec{u}}) \rangle \\ &= \frac{(-n_1 q z_u - n_1 y_u + n_2 x_u + n_2 p z_u)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}} \end{aligned}$$

Par définition $(n_1, n_2) = \frac{(-y_u, x_u)}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}}$, donc on a :

$$F = \frac{y_u q z_u + y_u^2 + x_u^2 + x_u p z_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}}$$

or $z_u = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = p x_u + q y_u$ donc :

$$\begin{aligned} F &= \frac{2y_u q p x_u + q^2 y_u^2 + y_u^2 + x_u^2 + p^2 x_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x_u^2(1 + p^2) + y_u^2(1 + q^2) + 2pqx_u y_u}{(1 + p^2 + q^2)(x_u^2 + y_u^2)}}. \end{aligned}$$

Comme $x_u = n_2 \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$ et $y_u = -n_1 \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$ on obtient finalement :

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{\frac{n_1^2(1 + q^2) + n_2^2(1 + p^2) - 2pq n_1 n_2}{(1 + p^2 + q^2)}} \\ &= \sqrt{a n_1^2 + b n_2^2 - c n_1 n_2} \end{aligned} \tag{6}$$

Les paramètres a , b et c sont fonctions des seules caractéristiques différentielles de la surface S et peuvent n'être calculés qu'une seule fois. Le schéma d'évolution ne dépend alors que de la paramétrisation de la courbe, qui doit être recalculée à chaque étape de façon à déterminer les composantes (n_1, n_2) . Néanmoins, ces composantes ne peuvent pas être estimées avec précision lorsque la courbe devient complexe car le calcul des dérivées est instable.

L'approche dite eulérienne proposée par Osher et Sethian [14, 17] et développée originellement pour modéliser l'expansion de cristaux, permet de s'affranchir de la paramétrisation. Elle repose sur la description de la courbe comme un isocontour (*level-set*) de niveau 0 d'une fonction φ . L'intérêt principal de cette approche est qu'elle permet de prendre en compte des changements de topologie. D'autre part, les auteurs fournissent un schéma de résolution numérique stable pour résoudre l'équation (6) dans ce contexte.

Si φ est une fonction telle que $\mathcal{C}(u, t) = \varphi^{-1}(0)$, on peut écrire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \langle \vec{\nabla} \varphi, F \vec{n} \rangle.$$

D'autre part puisque \mathcal{C} est défini comme un isocontour, sa normale a pour expression $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} \varphi}{\|\vec{\nabla} \varphi\|}$, et on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \left\langle \vec{\nabla} \varphi, F \frac{\vec{\nabla} \varphi}{\|\vec{\nabla} \varphi\|} \right\rangle \\ &= F \|\vec{\nabla} \varphi\|. \end{aligned} \tag{7}$$

Finalement en remplaçant $\vec{n} = (n_1, n_2)$ par $\left(\frac{\varphi_x}{\|\nabla\varphi\|}, \frac{\varphi_y}{\|\nabla\varphi\|}\right)$ on trouve l'équation d'évolution suivante :

$$\varphi_t = \sqrt{a\varphi_x^2 + b\varphi_y^2 - c\varphi_x\varphi_y}. \quad (8)$$

Dans [17] Sethian donne une méthode numérique stable pour résoudre cette équation (8). Elle dérive de celle pour résoudre les équations du type Hamilton-Jacobi et se présente sous la forme d'un schéma temporel explicite basé sur une approche par différences finies.

3 Généralisation à une dimension supplémentaire

Dans cette section nous nous proposons d'étendre la théorie proposée par Kimmel et al. au cas de l'évolution d'une famille de surfaces tracées sur une hypersurface S de dimension 3 plongée dans l'espace \mathbb{R}^4 . Pour cela, il est nécessaire d'introduire une notion de produit vectoriel dans \mathbb{R}^4 . Nous allons suivre une démarche générale valable en dimension quelconque.

3.1 Algèbres extérieures et opérateur $*$ de Hodge

Nous donnons dans les lignes qui suivent un aperçu de cette théorie. Le lecteur intéressé pourra se référer à [1] pour un exposé plus complet.

Soit \mathcal{E} un espace vectoriel réel de dimension finie n , et (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de \mathcal{E} . On démontre qu'il est possible de construire, pour chaque entier p ($0 \leq p \leq n$) un nouvel espace vectoriel, dénoté $\Lambda^p(\mathcal{E})$ tel que:

- par convention, $\Lambda^0(\mathcal{E}) = \mathbb{R}$ et $\Lambda^1(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.
- $\Lambda^p(\mathcal{E})$ est l'ensemble des sommes formelles $\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p)} a_{i_1, i_2, \dots, i_p} u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_p}$, pour des multi-indices (i_1, i_2, \dots, i_p) et des coefficients réels a_{i_1, i_2, \dots, i_p} , les u_{i_j} étant des vecteurs de \mathcal{E} .

Les $\Lambda^p(\mathcal{E})$ s'appellent les *puissances extérieures* de l'espace vectoriel \mathcal{E} . Les "produits" $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_p}$ sont supposés être multilinéaires en les variables $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$ et alternés, c'est à dire $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_p} = 0$ dès que deux vecteurs sont égaux dans le produit. On démontre que pour chaque entier p , $0 \leq p \leq n$, $\Lambda^p(\mathcal{E})$ est de dimension finie égale à $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Une base de $\Lambda^p(\mathcal{E})$ est donnée par la famille des $(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p})$ avec $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n$. Par exemple, si \mathcal{E} est l'espace \mathbb{R}^4 muni de sa base naturelle (e_1, e_2, e_3, e_4) , la base standard de $\Lambda^3(\mathbb{R}^4)$ est $(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4)$, et celle de $\Lambda^4(\mathbb{R}^4)$ est $(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$.

Supposons maintenant qu'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soit défini dans \mathcal{E} . On peut alors construire un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ dans $\Lambda^p(\mathcal{E})$ par l'égalité:

$$\langle u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p, w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p \rangle_p = \det(\langle u_i, w_j \rangle) \quad (9)$$

Comme $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, les deux espaces vectoriels $\Lambda^p(\mathcal{E})$ and $\Lambda^{(n-p)}(\mathcal{E})$ sont isomorphes. L'opérateur $*$ de Hodge permet de construire un isomorphisme "standard" entre ces deux espaces vectoriels de la façon suivante. Soient λ et μ deux éléments de $\Lambda^p(\mathcal{E})$ et $\Lambda^{(n-p)}(\mathcal{E})$ respectivement. L'image de λ par l'opérateur de Hodge est notée habituellement $*\lambda$, elle appartient à $\Lambda^{(n-p)}(\mathcal{E})$ et est définie par l'égalité:

$$\lambda \wedge \mu = \langle *\lambda, \mu \rangle_{n-p} e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \quad (10)$$

Étudions à présent quelques exemples simples. Supposons que \mathcal{E} est l'espace \mathbb{R}^3 , et que u et v sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . En utilisant des calculs élémentaires sur les déterminants et l'équation 10, on montre facilement que $*(u \wedge v)$ est le produit vectoriel habituel des deux vecteurs u et v dans \mathbb{R}^3 . Si w un troisième vecteur dans \mathbb{R}^3 , $*(u \wedge v \wedge w)$ est simplement le déterminant $\det(u, v, w)$, autrement dit le produit mixte de ces trois vecteurs. Prenons maintenant $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ et considérons trois vecteurs linéairement indépendants u, v et w dans \mathbb{R}^4 . On montre facilement que $*(u \wedge v \wedge w)$ possède les propriétés suivantes:

- c'est un vecteur de \mathbb{R}^4 orthogonal à u, v et w ;
- la base $(u, v, w, *(u \wedge v \wedge w))$ est directe ;
- ses composantes sont :

$$\left(- \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right)$$

dans la base standard de $\Lambda^3(\mathbb{R}^4)$ (avec $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 + u_4e_4$ et de même pour v, w) ;

$$- \text{ on a } \|*(u \wedge v \wedge w)\|^2 = \begin{vmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, u \rangle & \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{vmatrix}.$$

Cette dernière égalité $\|*(u \wedge v \wedge w)\|^2$ est particulièrement utile, car elle généralise une formule connue sur la norme du produit vectoriel ordinaire dans \mathbb{R}^3 .

3.2 Équation d'évolution des surfaces d'égale distance

On conserve les mêmes notations que dans les paragraphes précédents, mais les entités manipulées ont systématiquement une dimension supplémentaire. Soit donc S une hypersurface dans \mathbb{R}^4 , c'est-à-dire une variété de dimension 3 plongée dans un espace à quatre dimensions. Étant donnée une partie $\Sigma \subset S$ (dans la pratique, Σ est une surface tracée sur S), on considère l'ensemble des points de S à distance géodésique minimale t de Σ (voir figure 5) :

$$\{p | d_S(p, \Sigma) = t\} = \alpha(*, t).$$

Dans cette expression, d_S est la distance géodésique minimale sur l'hypersurface S , déterminée par les chemins de plus petite longueur partant d'un point $p \in S$.

Désignons par $\alpha(u, v, t)$ une paramétrisation locale d'une famille de surface indexées par t tracées sur S respectant l'égalité ci-dessus. On cherche à montrer que :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v)$$

où \wedge désigne le produit extérieur des trois vecteurs \vec{N} , $\vec{\tau}^u$ et $\vec{\tau}^v$ sur \mathbb{R}^4 , $*$ l'opérateur de Hodge (voir section 3.1), τ^u et τ^v les tangentes à S et \vec{N} la normale.

On remarque que l'on peut toujours choisir paramétrisation (u, v) orthogonale, c'est à dire telle que :

$$\langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v \rangle = 0$$

où

$$\vec{\tau}^u = \frac{\partial \alpha / \partial u}{\|\partial \alpha / \partial u\|} \text{ et } \vec{\tau}^v = \frac{\partial \alpha / \partial v}{\|\partial \alpha / \partial v\|}$$

cette propriété est démontrée dans [8] (page 183).

Lemme 1

Pour tout u_0 et v_0 fixés, la courbe $\beta(t) = \alpha(u_0, v_0, t)$ est une géodésique.

Preuve On démontre ce lemme en montrant que β_{tt} est perpendiculaire à τ^u et τ^v , et à $* (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v)$. La seule possibilité est que β_{tt} soit colinéaire à \vec{N} ce qui correspond à la définition des géodésiques.

1. On a

$$\beta_t = \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v)$$

donc

$$\begin{aligned} \|\beta_t\|^2 &= \left\| * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v) \right\|^2 \\ &= \begin{vmatrix} \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle & \langle \vec{N}, \vec{\tau}^u \rangle & \langle \vec{N}, \vec{\tau}^v \rangle \\ \langle \vec{\tau}^u, \vec{N} \rangle & \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^u \rangle & \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v \rangle \\ \langle \vec{\tau}^v, \vec{N} \rangle & \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^u \rangle & \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^v \rangle \end{vmatrix} \\ &= \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle \begin{vmatrix} \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^u \rangle & \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v \rangle \\ \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^u \rangle & \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^v \rangle \end{vmatrix} - \langle \vec{N}, \vec{\tau}^u \rangle \begin{vmatrix} \langle \vec{\tau}^u, \vec{N} \rangle & \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v \rangle \\ \langle \vec{\tau}^v, \vec{N} \rangle & \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^v \rangle \end{vmatrix} \\ &\quad + \langle \vec{N}, \vec{\tau}^v \rangle \begin{vmatrix} \langle \vec{\tau}^u, \vec{N} \rangle & \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^u \rangle \\ \langle \vec{\tau}^v, \vec{N} \rangle & \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^u \rangle \end{vmatrix} \\ &= 1 - \langle \vec{N}, \vec{\tau}^u \rangle^2 - \langle \vec{N}, \vec{\tau}^v \rangle^2 \end{aligned}$$

En effet on a choisit un paramétrage orthogonal de α de telle sorte que $\langle \tau^{\vec{u}}, \tau^{\vec{v}} \rangle = 0$. D'autre part \vec{N} est le vecteur normal de S , il est partout orthogonal à S et par conséquent perpendiculaire aux vecteurs tangents de α :

$$\langle \vec{N}, \tau^{\vec{u}} \rangle = \langle \vec{N}, \tau^{\vec{v}} \rangle = 0$$

donc

$$||\beta_t||^2 = 1$$

Ce résultat prouve d'une part que t est l'abscisse curviligne de β et d'autre part que :

$$\langle \beta_{tt}, \beta_t \rangle = \left\langle \frac{d^2\beta}{dt^2}, \frac{d\beta}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \left(* \left(\vec{N} \wedge \tau^{\vec{u}} \wedge \tau^{\vec{v}} \right) \right), * \left(\vec{N} \wedge \tau^{\vec{u}} \wedge \tau^{\vec{v}} \right) \right\rangle = 0. \quad (11)$$

2. On a :

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left(* \left(\vec{N} \wedge \tau^{\vec{u}} \wedge \tau^{\vec{v}} \right) \right), \tau^{\vec{u}} \right\rangle = \left\langle \beta_{tt}, \frac{\alpha_u}{||\alpha_u||} \right\rangle$$

et

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left(* \left(\vec{N} \wedge \tau^{\vec{u}} \wedge \tau^{\vec{v}} \right) \right), \tau^{\vec{v}} \right\rangle = \left\langle \beta_{tt}, \frac{\alpha_v}{||\alpha_v||} \right\rangle.$$

Or, on remarque que

$$\frac{d}{dt} \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_u}{||\alpha_u||} \right\rangle = \frac{d}{dt} \left\langle * \left(\vec{N} \wedge \tau^{\vec{u}} \wedge \tau^{\vec{v}} \right), \tau^{\vec{u}} \right\rangle = \frac{d}{dt} 0 = 0$$

et que

$$\frac{d}{dt} \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_v}{||\alpha_v||} \right\rangle = \frac{d}{dt} \left\langle * \left(\vec{N} \wedge \tau^{\vec{u}} \wedge \tau^{\vec{v}} \right), \tau^{\vec{v}} \right\rangle = 0.$$

La règle de dérivation donne :

$$\frac{d}{dt} \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_u}{||\alpha_u||} \right\rangle = \left\langle \alpha_{tt}, \frac{\alpha_u}{||\alpha_u||} \right\rangle + \left\langle \alpha_t, \left(\frac{\alpha_u}{||\alpha_u||} \right)_t \right\rangle$$

et de même

$$\frac{d}{dt} \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_v}{||\alpha_v||} \right\rangle = \left\langle \alpha_{tt}, \frac{\alpha_v}{||\alpha_v||} \right\rangle + \left\langle \alpha_t, \left(\frac{\alpha_v}{||\alpha_v||} \right)_t \right\rangle,$$

donc

$$\left\langle \alpha_{tt}, \frac{\alpha_u}{||\alpha_u||} \right\rangle = - \left\langle \alpha_t, \left(\frac{\alpha_u}{||\alpha_u||} \right)_t \right\rangle \text{ et } \left\langle \alpha_{tt}, \frac{\alpha_v}{||\alpha_v||} \right\rangle = - \left\langle \alpha_t, \left(\frac{\alpha_v}{||\alpha_v||} \right)_t \right\rangle.$$

On pose $g = \|\alpha_u\|$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right)_t &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right) \\ &= \frac{\alpha_{ut}g - \alpha_u g_t}{g^2} \\ &= \frac{\alpha_{ut}}{g} - \frac{\alpha_u g_t}{g^2} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha_t, \left(\frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right)_t \right\rangle &= \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_{ut}}{g} - \frac{\alpha_u g_t}{g^2} \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_{ut}}{g} \right\rangle - \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_u g_t}{g^2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{g} \langle \alpha_t, \alpha_{ut} \rangle - \frac{g_t}{g^2} \left\langle * \left(\vec{N} \wedge \tau^{\vec{u}} \wedge \tau^{\vec{v}} \right), \tau^{\vec{u}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{g} \frac{1}{2} \frac{d}{du} \langle \alpha_t, \alpha_t \rangle - \frac{g_t}{g^2} 0 \\ &= \frac{1}{g} \frac{1}{2} \frac{d}{du} 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

et de même:

$$\left\langle \alpha_t, \left(\frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} \right)_t \right\rangle = 0.$$

Donc

$$\langle \beta_{tt}, \tau^{\vec{u}} \rangle = \langle \beta_{tt}, \tau^{\vec{v}} \rangle = 0. \quad (12)$$

$\frac{d^2 \beta}{dt^2}$ est orthogonal à $\tau^{\vec{u}}$ et à $\tau^{\vec{v}}$. Il ne reste plus qu'une seule possibilité :

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} \propto N(\vec{\beta}(t)), \quad (13)$$

c'est à dire $\beta(t)$ est une géodésique. ■

Soit $\alpha(u, v, t)$ une surface inscrite sur l'hypersurface $S \subset \mathbb{R}^4$ se propageant le long de l'axe t et paramétrée par u et v .

Lemme 2

L'évolution de la surface d'égale distance est donnée par :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = * \left(\vec{N} \wedge \tau^{\vec{u}} \wedge \tau^{\vec{v}} \right) \quad (14)$$

Preuve

On démontre ce lemme en deux étapes et en s'appuyant sur le Lemme de Gauss.

1. Soit $p \in S$ et \vec{w} un vecteur tangent à S en p de norme $\|\vec{w}\| = 1$.

Soit $\beta^w(t)$ l'unique géodésique telle que :

$$\beta^w(0) = p \quad \text{et} \quad \frac{d\beta^w}{dt} = \vec{w}.$$

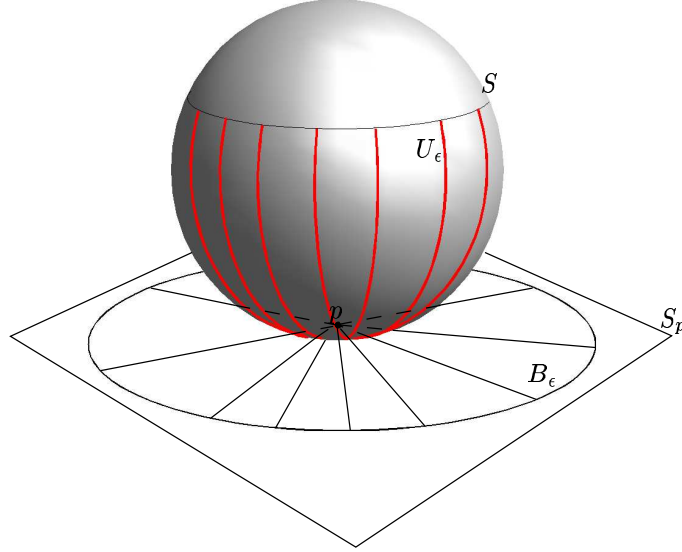


FIG. 6 – Conséquence du lemme de Gauss dans le cas d'une sphère: localement, les radiales géodésiques sont orthogonales aux géodésiques $\{\exp_p(\vec{v}) : \|\vec{v}\| = \epsilon\}$

D'après le lemme de Gauss [19] (voir figure 6), les géodésiques radiales $\gamma^w(t)$ sont orthogonales aux géodésiques $\{\exp_p(\vec{v}) : \|\vec{v}\| = \epsilon\}$ que l'on peut noter $\alpha(u, v)$. Donc, quand on part du point p les géodésiques radiales sont orthogonales aux hypersurfaces $\{\exp_p(\vec{v}) : \|\vec{v}\| = \epsilon\} = \alpha(u, v)$.

2. On veut maintenant généraliser ceci quand on part d'une surface initiale $\alpha(u, v, 0)$.

On propage une surface $\eta(\mu, \nu, t)$ à distance géodésique de $p \in P$ où P est l'ensemble des points situés à distance géodésique d_S de $\alpha(u, v, 0)$. On arrête la propagation quand on arrive sur $\alpha(u, v, 0)$ au point $q = \alpha(u_0, v_0, 0)$ c'est à dire quand

$$q = \eta(\mu_0, \nu_0, d_S).$$

Les tangentes $\vec{\tau}^\alpha(u_0, v_0)$ et $\vec{\tau}^\eta(\mu_0, \nu_0)$ sont dans le même plan.

Comme le chemin le plus court qui va de p à q est donné par la géodésique radiale $\beta(t) = \eta(\mu, \nu, t)|_{\mu=\mu_0, \nu=\nu_0}$ et que d'après le lemme de Gauss $\beta(t)$ est orthogonal à $\eta(\mu, \nu, t)$ le long de $\mu = \mu_0, \nu = \nu_0$,

$$\vec{\tau}^\beta|_{t=d_S} \perp \vec{\tau}^\eta|_{t=d_S, \mu=\mu_0, \nu=\nu_0}$$

et donc

$$\vec{\tau}^\beta|_{t=d_S} \perp \vec{\tau}^\alpha|_{u=u_0, v=v_0}.$$

Donc, le chemin le plus court partant de p pour aller à α est donné par les géodésiques partant de $\alpha(u, v)$ et orthogonal à τ^α , c'est à dire dans ce cas à τ^u et τ^v . Une telle géodésique est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = * \left(\vec{N} \wedge \tau^u \wedge \tau^v \right)$$

■

3.3 Équation de la projection

On aboutit à une équation aux dérivées partielles difficile à résoudre. Nous allons simplifier le problème en projetant le schéma d'évolution sur un espace de dimension inférieure, en utilisant un résultat issu de la théorie de propagation des fronts [9]: on suppose que la direction de propagation est colinéaire à la normale à la surface. Nous supposons que l'hypersurface S est définie comme un graphe $W(x, y, z, w)$:

$$W(x, y, z, w) = \{(x, y, z, w) | w = w(x, y, z, w)\}$$

et on projette pour obtenir la surface \mathcal{C} telle que :

$$\mathcal{C}(t) = \Pi \circ \alpha = \{(x, y, z) | (x, y, z, f(x, y, z)) \in \alpha(t)\}.$$

On pose : $\frac{\partial w}{\partial x} = p$, $\frac{\partial w}{\partial y} = q$ et $\frac{\partial w}{\partial z} = r$.

On veut montrer que

$$F = \sqrt{an_1^2 + bn_2^2 + cn_3^2 - dn_1n_2 - en_1n_3 - fn_2n_3}$$

où $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ est la normale au contour projeté \mathcal{C} et F est définie par :

$$F = \left\langle \vec{n}, \Pi \circ * \left(\vec{N} \wedge \tau^u \wedge \tau^v \right) \right\rangle,$$

τ^u et τ^v étant les deux tangentes à W :

$$\tau^u = \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} = \frac{(x_u, y_u, z_u, f_u)}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + f_u^2}} \text{ et } \tau^v = \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} = \frac{(x_v, y_v, z_v, f_v)}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 + f_v^2}},$$

\vec{N} étant la normale à W :

$$\vec{N} = \frac{* (F_x \wedge F_y \wedge F_z)}{\| * (F_x \wedge F_y \wedge F_z) \|}.$$

On pose :

$$W_x = \left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right) = (1, 0, 0, p)$$

$$W_y = \left(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) = (0, 1, 0, q),$$

et

$$W_z = \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z} \right) = (0, 0, 1, r).$$

Grâce aux formules introduites dans la section 3.1, on obtient pour \vec{N} :

$$\vec{N} = \frac{(-p, -q, -r, 1)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2}}.$$

L'équation de propagation devient finalement :

$$\alpha_t = \left(\begin{array}{l} \frac{pq \begin{vmatrix} x_v & x_u \\ z_v & z_u \end{vmatrix} + q^2 \begin{vmatrix} y_v & y_u \\ z_v & z_u \end{vmatrix} - rp \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} - r^2 \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}} \\ -p^2 \begin{vmatrix} x_v & x_u \\ z_v & z_u \end{vmatrix} - pq \begin{vmatrix} y_v & y_u \\ z_v & z_u \end{vmatrix} + rq \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} + r^2 \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ x_v & z_v \end{vmatrix} \\ \frac{\quad}{\sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}} \\ p^2 \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} + pr \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} - q^2 \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} - qr \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \\ \frac{\quad}{\sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}} \\ + \text{un terme qui disparaît après la projection} \end{array} \right)$$

On obtient, après projection :

$$\Pi \circ \left(* \left(\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v \right) \right) = \frac{\begin{pmatrix} qz_u f_v - qf_u z_v - ry_u f_v + ry_v f_u + y_v z_u \\ -qz_u f_v + qf_u z_v + ry_u f_v + y_u z_v - ry_v f_u - y_v z_u \\ py_u z_v - py_v z_u - qx_u z_v + rx_u y_v + qx_v z_u - rx_v y_u \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}$$

On regarde maintenant la projection de α_t suivant la normale

$$\vec{n} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \\ -\frac{1}{n} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \\ \frac{1}{n} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

où n est la norme telle que :

$$n = \left\| \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \right\|$$

Le produit scalaire est donc :

$$F = \langle \Pi \circ \alpha_t, \vec{n} \rangle = \frac{n_1^2 n (-1 - r^2 - q^2) + n_2^2 n (-1 - r^2 - p^2) + n_3^2 n (-1 - p^2 - q^2) + 2n_1 n_2 n p q + 2n_1 n_3 n r p + 2n_2 n_3 n r q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}$$

On sait que :

$$\langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v + f_u f_v = 0,$$

donc on pose :

$$\begin{aligned} A &= (x_u^2 + y_u^2 + x_u^2 + z_u^2 f_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + x_v^2 + z_v^2 f_v^2) \\ &= (x_u^2 + y_u^2 + x_u^2 + z_u^2 f_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + x_v^2 + z_v^2 f_v^2) \\ &\quad - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v + f_u f_v)^2. \end{aligned}$$

on sait aussi que :

$$f_u = p x_u + q y_u + r z_u \text{ et que } f_v = p x_v + q y_v + r z_v.$$

On pose également :

$$B = n_1^2 n (1 + r^2 + q^2) + n_2^2 n (1 + r^2 + p^2) + n_3^2 n (1 + p^2 + q^2)$$

On peut alors remarquer que :

$$\begin{aligned} A - B &= 2pq n_1 n_2 n^2 - 2pr n_1 n_3 n^2 - 2qr n_2 n_3 n^2 \\ &= \left(\sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} \right)^2 - B, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} \right) = \\ &n (n_1^2 (1 + r^2 + q^2) + n_2^2 (1 + r^2 + p^2) + n_3^2 (1 + p^2 + q^2) - 2n_1 n_2 p q - 2n_1 n_3 r p - 2n_2 n_3 r q) \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 F &= \sqrt{\frac{(1+q^2+r^2)n_1^2 + (1+p^2+r^2)n_2^2 + (1+p^2+q^2)n_3^2 - 2pqn_1n_2 - 2prn_1n_3 - 2qrn_2n_3}{1+p^2+q^2+r^2}} \\
 &= \sqrt{an_1^2 + bn_2^2 + cn_3^2 - dn_1n_2 - en_1n_3 - fn_2n_3}
 \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a = \frac{1+q^2+r^2}{1+p^2+q^2+r^2} \\
 b = \frac{1+p^2+r^2}{1+p^2+q^2+r^2} \\
 c = \frac{1+p^2+q^2}{1+p^2+q^2+r^2} \\
 d = \frac{2pq}{1+p^2+q^2+r^2} \\
 e = \frac{2pr}{1+p^2+q^2+r^2} \\
 f = \frac{2qr}{1+p^2+q^2+r^2}.
 \end{array} \right.$$

3.4 Formulation implicite

De la même façon que dans le cas 2D on utilise une approche eulérienne, la surface \mathcal{C} est définie comme une isosurface de niveau 0 d'une fonction potentielle différentiable φ de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}(u, v, t) = \varphi^{-1}(0)$$

telle que φ soit négative à l'intérieur et positive à l'extérieur de la surface d'équipotentielle 0. La règle de dérivation permet d'obtenir :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \langle \vec{\nabla} \varphi, F \vec{n} \rangle = F ||\vec{\nabla} \varphi||.$$

Cette formulation par isocontour permet d'obtenir l'équation de l'évolution des surfaces \mathcal{C} le long de l'hypersurface définie comme un graphe W :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{a \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi^2}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} - d \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - f \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z}} \quad (15)$$

3.5 Résolution Numérique

On peut utiliser une méthode de résolution du même type que dans le cas 2D. Il s'agit d'un schéma temporel explicite où les gradients spatiaux sont estimés par différence finie et avec l'aide de la méthode du minmod.

L'approche du minmod permet de bien encadrer l'estimation de la dérivée et ainsi de garder un contrôle sur la variation de la solution. La fonction minmod est définie par :

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \text{sign}(a)\min(|a|, |b|) & \text{si } a < b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les gradients spatiaux sont ensuite estimés en utilisant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_x(ih_x, jh_y, kh_z) &= \text{minmod}(D_x^+ \varphi(ih_x, jh_y, kh_z), D_x^- \varphi(ih_x, jh_y, kh_z)) \\ \varphi_y(ih_x, jh_y, kh_z) &= \text{minmod}(D_y^+ \varphi(ih_x, jh_y, kh_z), D_y^- \varphi(ih_x, jh_y, kh_z)) \\ \varphi_z(ih_x, jh_y, kh_z) &= \text{minmod}(D_z^+ \varphi(ih_x, jh_y, kh_z), D_z^- \varphi(ih_x, jh_y, kh_z)) \end{aligned}$$

où h_x et h_y sont les pas de discrétisation spatiaux ; D_x^- et D_x^+ (respectivement D_y^- , D_y^+ et D_z^- , D_z^+) sont chacune les dérivées à gauche et à droite dans la direction x (respectivement y et z), et elles sont définies par :

$$\begin{aligned} D_x^- \varphi &= \frac{\varphi(i+1, j, k) - \varphi(i, j, k)}{h_x} \\ D_x^+ \varphi &= \frac{\varphi(i, j, k) - \varphi(i-1, j, k)}{h_x} \end{aligned}$$

Néanmoins, il est montré dans [16] que l'utilisation de cette méthode ne permet pas une estimation correcte de la norme des normales dans le cas d'une singularité de la solution. Pour estimer les carrés des dérivées partielles on utilise alors une autre méthode d'approximation :

$$\begin{aligned} \varphi_x^2 &= (\max(D_x^+ \varphi(i, j, k), -D_x^- \varphi(i, j, k), 0))^2 \\ \varphi_y^2 &= (\max(D_y^+ \varphi(i, j, k), -D_y^- \varphi(i, j, k), 0))^2 \\ \varphi_z^2 &= (\max(D_z^+ \varphi(i, j, k), -D_z^- \varphi(i, j, k), 0))^2 \end{aligned}$$

De ces différentes approximations on peut déduire la version discrète du schéma d'évolution de l'équation de propagation (15) :

$$\begin{aligned} \varphi^{\tau+1} &= \varphi^t + [a (\max(D_x^+ \varphi^t, -D_x^- \varphi^t, 0))^2 \\ &\quad + b (\max(D_y^+ \varphi^t, -D_y^- \varphi^t, 0))^2 \\ &\quad + c (\max(D_z^+ \varphi^t, -D_z^- \varphi^t, 0))^2 \\ &\quad - d \text{minmod}(D_x^+ \varphi^t, D_x^- \varphi^t) \text{minmod}(D_y^+ \varphi^t, D_y^- \varphi^t) \\ &\quad - e \text{minmod}(D_x^+ \varphi^t, D_x^- \varphi^t) \text{minmod}(D_z^+ \varphi^t, D_z^- \varphi^t) \\ &\quad - f \text{minmod}(D_y^+ \varphi^t, D_y^- \varphi^t) \text{minmod}(D_z^+ \varphi^t, D_z^- \varphi^t)]^{\frac{1}{2}} \Delta\tau, \end{aligned} \tag{16}$$

où τ représente le paramètre de relaxation du système. La convergence vers une solution stable est assurée dès lors que la résolution temporelle $\Delta\tau$ et les résolutions spatiales h_x , h_y et h_z satisfont la condition de Courant-Friedrich-Lewy [6] :

$$\Delta\tau \leq \frac{1}{\min(h_x, h_y, h_z)} \quad (17)$$

En pratique, la résolution spatiale est donnée par celle de l'image et la résolution temporelle déduite de manière à respecter l'équation (17).

4 Application à la mise en correspondance de surfaces

La méthode présentée aux paragraphes précédents permet de calculer la propagation d'une surface le long d'une hypersurface et ainsi d'obtenir une mesure de distance géodésique. Comme Cohen et *al.* l'ont proposés dans le cas 2D [3, 4], on en déduit une méthode de mise en correspondance en calculant des chemins de coût optimal entre deux surfaces. Nous désignons par \mathcal{S} et \mathcal{D} les deux surfaces représentant les structures à mettre en correspondance. Pour réaliser la mise en correspondance de \mathcal{S} et \mathcal{D} , il est nécessaire de définir :

1. φ_0 et ψ_0 les deux fonctions représentant les courbes \mathcal{S} et \mathcal{D} à l'instant 0,
2. le graphe W sur lequel la carte des distances géodésiques sera calculée et qui corresponde à une mesure des similarités entre \mathcal{S} et \mathcal{D} .

4.1 Initialisation

On définit les fonctions implicites φ_0 et ψ_0 , permettant d'initialiser l'algorithme de calcul de φ et ψ . Pour cela, on utilise la distance euclidienne d que l'on peut calculer par exemple en utilisant la méthode proposée par Danielson [7]. On doit également s'assurer que φ_0 (respectivement ψ_0) soit positive à l'extérieur de la surface \mathcal{S} (\mathcal{D}) et négative à l'intérieur. On introduit donc :

$$\varphi_0(x, y, z) = \begin{cases} -d(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in \text{intérieur de } \varphi_0^{-1}(0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) \in \varphi_0^{-1}(0) \\ +d(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in \text{extérieur de } \varphi_0^{-1}(0) \end{cases} \quad (18)$$

La résolution de l'équation (15) donnée par le schéma (16) en respectant la condition (17), permet d'obtenir φ et ψ . On en déduit les cartes de distances géodésiques $D_{\mathcal{S}}$ et $D_{\mathcal{D}}$:

$$D_{\mathcal{S}} = \{(x, y, z, \varphi(x, y, z))\}$$

et

$$D_{\mathcal{D}} = \{(x, y, z, \psi(x, y, z))\}.$$

Les chemins géodésiques minimaux connectant les surfaces \mathcal{S} et \mathcal{D} sont obtenus en minimisant la fonction de coût f :

$$f(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z)$$

le long de chaque chemin. Ce qui revient à calculer les chemins p tels que :

$$\begin{cases} \frac{dp}{ds}(x, y, z, s) = -\nabla(\varphi + \psi) \\ p(x, y, z, 0) = (x, y, z) \end{cases} \quad (19)$$

où s est l'abscisse le long de p .

4.2 Définition de l'hypersurface de coût

Le graphe W utilisé pour l'évolution des courbes doit être le même pour φ et ψ afin d'obtenir une mesure de la similarité basée sur les cartes de distance. Il doit être tel que les deux courbes φ_0 et ψ_0 soient des *level-set* de ce graphe. On se propose d'utiliser deux types d'hypersurfaces de coût, l'une ne s'appuie que sur la distance euclidienne, c'est une mesure de "l'éloignement" entre les deux structures, l'autre incorpore les propriétés géométriques des surfaces à mettre en correspondance en utilisant la notion de courbure moyenne.

1. On peut définir une hypersurface de coût simple uniquement basée sur la distance euclidienne au contours. On définit W telle que :

$$W(x, y, z, w(x, y, z)) = (x, y, z, \min(|\varphi_0|, |\psi_0|)) \quad (20)$$

2. Dans une perspective de mise en correspondance plus proche des réalités physiques des deux surfaces, il est intéressant de pouvoir s'appuyer également sur la conservation de certaines propriétés géométriques.

On peut définir [8] la courbure normale maximum κ_1 et la courbure normale minimum κ_2 correspondant chacune aux directions principales en un point p d'une surface données par les vecteurs propres de la matrice fondamentale de la surface en p . On appelle ces deux courbures les courbures principales. On peut en déduire une définition de la courbure moyenne κ :

$$\kappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

Un des avantages de la formulation par *level-set* est que la courbure moyenne est donnée par une équation simple [17] :

$$\kappa_S = \frac{(\varphi_{yy} + \varphi_{zz})\varphi_x^2 + (\varphi_{xx} + \varphi_{zz})\varphi_y^2 + (\varphi_{xx} + \varphi_{yy})\varphi_z^2 - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} - 2\varphi_x\varphi_z\varphi_{xz} - 2\varphi_y\varphi_z\varphi_{yz}}{(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)^{3/2}}$$

On utilise un critère d'appariement ρ :

$$\rho(\Delta\kappa, d) = 1 - \frac{\Delta\kappa^2}{1 + d^2 \Delta\kappa^2 / \sigma}$$

où σ est la taille du voisinage à prendre en compte, d la distance euclidienne et $\Delta\kappa$ l'écart entre les courbures moyennes $\Delta\kappa = \kappa_S - \kappa_D$:

$$\rho(\Delta\kappa, d) = 1 - \frac{\Delta\kappa^2}{1 + d^2 \Delta\kappa^2 / \sigma}.$$

On définit le nouveau graphe d'hypersurface :

$$W(x, y, z, w(x, y, z)) = \min(|\varphi_0| \rho(\Delta\kappa, \varphi_0), |\psi_0| \rho(\Delta\kappa, \psi_0)). \quad (21)$$

4.3 Application

On applique cette définition sur des exemples synthétiques.

La figure 7 illustre la mise en correspondance de deux sphères mais qui sont excentrées en utilisant la définition du graphe W donné par l'équation (20). Les chemins sont colorés par la distance à la surface de destination (ici la sphère verte). On remarque que de part la forme de l'hypersurface de coût, basée uniquement sur la distance séparant les structures, les chemins correspondent ici aux plus courts chemins au sens de la distance euclidienne dans \mathbb{R}^3 , ainsi les chemins qui partent de la sphère rouge au niveau de la flèche sont quasiment tangents à la surface de départ.

On utilise également le graphe (20) cas d'un changement de topologie, deux sphères fusionnent pour devenir un ellipsoïde. La figure 8 illustre la construction des chemins de mise en correspondance partant des sphères rouges. La couleur des chemins est en relation avec la distance à la structure d'arrivée (ici plus ils sont bleu foncé, plus l'ellipsoïde est proche). En augmentant le nombre de points de départ et en traçant les trajectoires depuis l'ellipsoïde, on peut mieux se rendre compte de l'effet du changement de topologie.

Dans le cas où les déformations entre les deux surfaces peuvent être localement de faible amplitude, on utilise le graphe donné par l'équation (21). La figure 10 illustre le résultat de la mise en correspondance de deux surfaces synthétiques.

5 Conclusion

Ce document propose une nouvelle approche pour mettre en correspondance deux surfaces arbitraires de \mathbb{R}^3 . Elle utilise une généralisation d'un schéma d'évolution de courbes basé sur la distance géodésique, et repose sur le développement d'une équation de propagation de surfaces pour des variétés d'ordre 3 plongées dans \mathbb{R}^4 . Pour cela, elle utilise l'opérateur de Hodge. Ensuite, en s'appuyant la théorie de propagation des fronts, l'équation de la propagation est réécrite en utilisant la formulation des isocontours (*level-set*), qui fournit les algorithmes stables utilisés pour résoudre numériquement cette équation aux dérivées

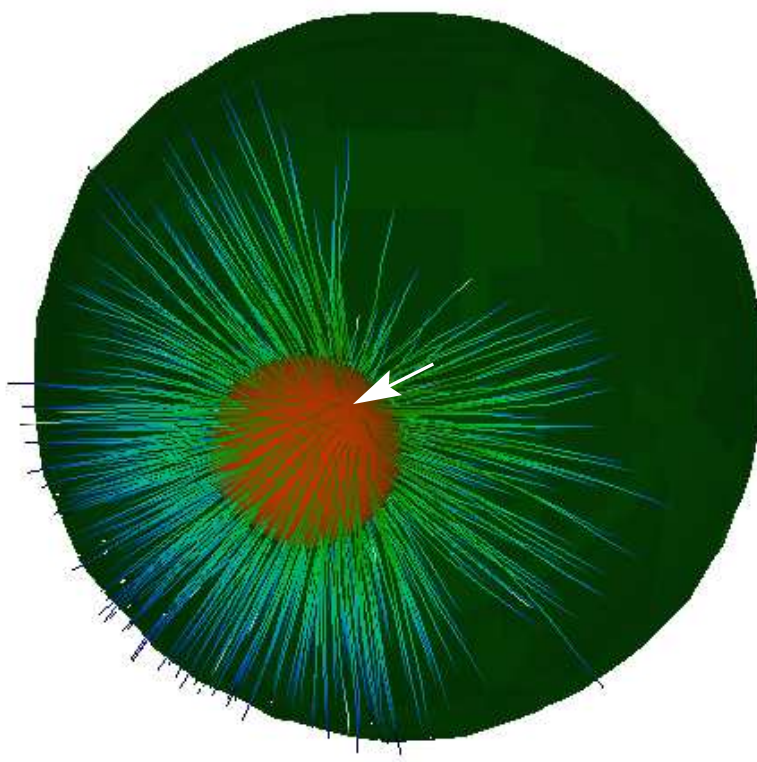


FIG. 7 – *Mise en correspondance de deux sphères excentrées.*

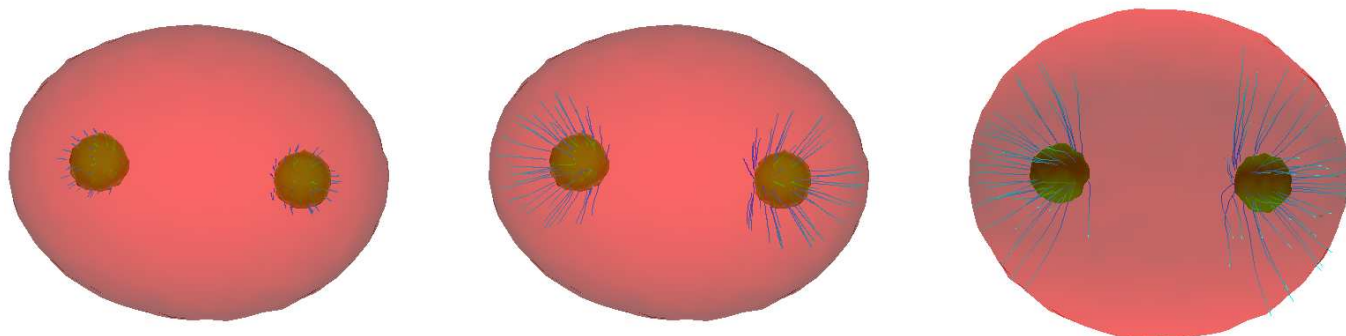


FIG. 8 – Mise en correspondance de deux sphères avec un ellipsoïde.

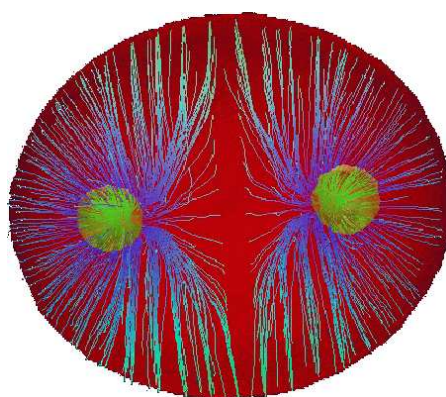


FIG. 9 – Mise en correspondance de deux sphères avec un ellipsoïde, autre visualisation.

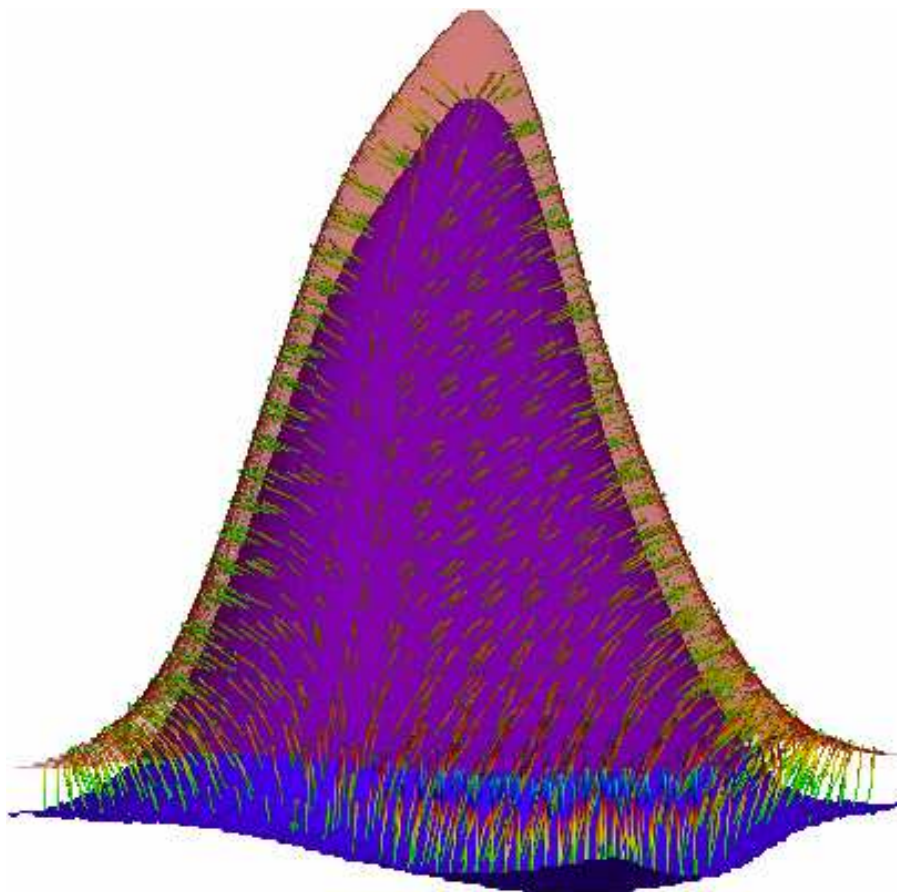


FIG. 10 – *Mise en correspondance de deux surfaces subissant une déformation.*

partielles. Grâce à cette formulation on calcule facilement la courbure des surfaces et on peut gérer les changements de topologie. On calcule ainsi, une carte de distance sur une hypersurface de coût. La méthode de mise en correspondance consiste à utiliser cette distance pour calculer les chemins optimaux entre les deux surfaces. Les chemins optimaux minimisent un critère de coût qui est formalisé explicitement par la définition de l'hypersurface de coût. Cette formulation confère à cette méthode de mise en correspondance un aspect très général, en effet la définition de l'hypersurface peut inclure un grand nombre de propriétés. Les propriétés utilisées dans cette étude sont la distance et la courbure, on peut ainsi gérer à la fois les changements de topologie et les grandes déformations, tout en restant efficace dans le cas de déformation plus faible. Une extension de ce travail pourrait être d'incorporer dans la définition de l'hypersurface des informations supplémentaires, comme par exemple une connaissance a priori de la déformation. D'autre part, l'utilisation de l'opérateur de Hodge pour définir l'équation de propagation de surfaces devrait permettre une généralisation aux dimensions supplémentaires. Cette généralisation permettrait de proposer une méthode de mise en correspondance très générale qui permettrait d'apparier des objets tridimensionnels pourvus d'attributs (comme la couleur ou la texture par exemple).

Références

- [1] R. Abraham, J.E. Marsden, and T.S. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis and applications*. Springer Verlag, 1988.
- [2] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *IJCV*, 22(1):61–79, February 1997.
- [3] I. Cohen and I. Herlin. Tracking meteorological structures through curves matching using geodesic paths. Technical Report 3191, INRIA, UR Rocquencourt, Juin 1997.
- [4] I. Cohen and I. Herlin. Curves matching using geodesic paths. In *Proceedings of the conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'98*, pages 741–746, Santa-Barbara, USA, June 1998. IEEE.
- [5] L.D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models: A minimal path approach. In *Proceedings of the conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 666–673, San Francisco, June 1996.
- [6] R. Courant, K.O. Friedrichs, and H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM-Journal*, 11:215–235, 1967.
- [7] E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 14:227–248, 1980.
- [8] M.P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.

- [9] C.L. Epstein and M. Gage. The curve shortening flow. In A. Chorin and A. Majda, editors, *Wave motion: Theory, modeling and Computation*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [10] R. Kimmel, A. Amir, and A.F. Bruckstein. Finding shortest paths on surfaces using levelset propagation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(6):635–640, June 1995.
- [11] R. Kimmel and A.M. Bruckstein. Tracking level sets by level sets: A method for solving the shape from shading problem. *CVIU*, 62(1):47–58, July 1995.
- [12] R. Kimmel, D. Shaked, N. Kiryati, and A.M. Bruckstein. Skeletonization via distance maps and level sets. *CVIU*, 62(3):382–391, November 1995.
- [13] R. Kimmel, K. Siddiqi, B.B. Kimia, and A.M. Bruckstein. Shape from shading: Level set propagation and viscosity solutions. *IJCV*, 16(2):107–133, October 1995.
- [14] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations. *J. of Comput. Physics*, 79:12–49, 1988.
- [15] N. Paragios and R. Deriche. Geodesic active regions for motion estimation and tracking. In *ICCV99*, page 688, 1999.
- [16] G. Sapiro, R. Kimmel, D. Shacked, B. Kimia, and A. Bruckstein. Implementing continuous-scale morphology via curve evolution. *Pattern Recognition*, 26(9):1363–1372, 1993.
- [17] J.A. Sethian. *Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Sciences*. Cambridge University Press, 1996.
- [18] J.A. Sethian and J. Strain. Crystal growth and dendritic solidification. *Journal of Computational Physics*, 98:231–253, 1992.
- [19] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry, Vol I*. Publish or Perish, Berkeley, 1971.
- [20] J. A. Thorpe. *Elementary Topics In Differential Geometry*. Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1979.

Table des matières

1	Propagation de fronts et isocontours	3
1.1	Propagation des fronts	3
1.2	Formulation par isocontours	3
1.3	Applications	5
2	Distance géodésique sur une surface	6
2.1	Géodésiques	6
2.2	Chemins géodésiques	8
2.3	Équation d'évolution de courbes d'égale distance sur une surface	8
3	Généralisation à une dimension supplémentaire	12
3.1	Algèbres extérieures et opérateur $*$ de Hodge	12
3.2	Équation d'évolution des surfaces d'égale distance	13
3.3	Équation de la projection	18
3.4	Formulation implicite	21
3.5	Résolution Numérique	22
4	Application à la mise en correspondance de surfaces	23
4.1	Initialisation	23
4.2	Définition de l'hypersurface de coût	24
4.3	Application	25
5	Conclusion	25



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399